UNIVERSITY OF NIŠ
The scientific journal **FACTA UNIVERSITATIS**
Series: **Mechanics, Automatic Control and Robotics** Vol.2, No 7/2, 1997 pp. 535 - 544
Editor of series: Katica (Stevanovi}) Hedrih, e-mail: katica@masfak.masfak.ni.ac.yu
Address: Univerzitetski trg 2, 18000 Niš, YU, Tel: (018) 547-095, Fax: (018)-547-950
http:// ni.ac.yu/Facta

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СПЛАЙНЫ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

UDC: 517.94+519.652

Р. В. Поляков

Инстутут физики НАН Украины
Украина, 252650, Киев, пр. Науки 46
E-mail: lukom@kossak.freenet.kiev.ua

Приводятся формулы представления кубического и бикубического сплайнов, а также квадратурная и кубатурная формулы, основанная на этих представлениях. С использованием этих формул строятся итерационные процессы для нахождения приближенного решения некоторых типов интегральных уравнений.

Для многих задач физики,например, нелинейной оптики,динамической голографии, экологии и других наук можно построить математические модели в виде интегральных уравнений (одномерных, многомерных, линейных,нелинейных) и их систем. К тому же часто математические модели процессов и явлений, традиционно формулируемые в виде дифференциальных уравнений, могут быть выражены в виде интегральных уравнений [1]. В определенных отношениях теория интегральных уравнений похожа на теорию уравнений в частных производных в том смысле, что имеется большое разнообразие их типов [2–6], каждый из которых обладает своей теорией и поэтому требует своей формы численных исследований. Поэтому проблема решения интегральных уравнений может быть рассматриваема как совокупность многих методов их исследования и построения решений. Но наличие методов не накладывает табу на создание новых эфективных методов или модернизацию существующих.

В данной работе предлагается один из методов решения интегральных уравнений, основанный на синтезе метода итераций с методом аппроксимации функций

Received August 28, 1997

полиномиальными сплайнами.

Полиномиальные сплайны в последнее время широко применяются в численных методах [7]–[11]. При этом в основном используются интерполяционные сплайны, которые обладают хорошими аппроксимативными свойствами и минимизирующими свойствами в ряде задач вариационного характера. Но построение интерполяционного сплайна требует выполнения значительного числа операций при решении систем уравнений для получения определяющих сплайн величин. Например, если заданы N значений функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, то для построения интерполяционного сплайна порядка $2n$ по N узлам объем вычислительной работы пропорционален величине n^2N. В многомерном случае объем вычислительных затрат возрастает многократно. Отметим два обстоятельства,которые стимулировали появление локальных (аппроксимационных) сплайнов минимального дефекта.Во-первых, известно,что значение интерполяционного сплайна $S_{n,m}(f;x)$ в каждой точке x, не являющейся узлом интерполяции x_k, зависит от значений $f(x_k)$ во всех узлах x_k из $[a,b]$, но эта зависимость сильно ослабевает по мере удаления узлов от точки x [8]. Это соображение стимулировало построение сплайнов минимального дефекта,в конструкции которых использовалась бы информация о значениях функции $f(x)$ в узлах x_k, достаточно близких к точке x. Во-вторых, наличие в пространстве сплайнов базиса из финитных функций (базис из B-сплайнов) стимулировало создание таких конструкций. Кроме того, во многих практических задачах не всегда является обязательным выполнение условий интерполяции значений данной функции, а существенным является требование построения по заданным значениям хорошей аппроксимации для функции и ее производных при возможно меньших вычислительных затратах.

Пусть $f(x) \in C[a,b]$, $N \geq 4$ - целое число, Δ_N - разбиение отрезка $[a,b]$:

$$\Delta_N: \quad x_i = a + ih, \quad h = (b-a)/N, \quad i = \overline{0,N} \tag{1}$$

Чтобы ввести B–сплайны m–го порядка, добавим к сетке Δ_N дополнительные точки

$$x_{-m} < x_{-m+1} < \ldots < x_{-1} < a; \quad b < x_{N+1} < \ldots < x_{N+m},$$

(положив, например, $x_{-i} = x_0 - ih; \quad x_{N+m} = x_N + ih, i = \overline{1,m}$). B-сплайн $B_{mi}(x)$ определяется как $(m+1)$-я разделенная разность от усеченной степенной функции

$$g_m(x;t) = (m+1)(t-x)_+^m$$

по значениям аргумента t в точках $x_i, \ldots, x_{i+m+1}$, [8]

$$B_{mi}(x) = (m+1)\sum_{j=i}^{i+m+1}(x_j - x)_+^m/\omega'_{m+1,i}(x_j), \tag{2}$$

$$\omega_{m+1,i}(x) = (x - x_i)...(x - x_{i+m+1}), \quad i = -m, ..., N-1.$$

Функции $B_{mi}(x)$ являются сплайнами степени m дефекта 1 с узлами в точках $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+m+1}$. Многие вычислительные аспекты B-сплайнов основываются на тождестве [11]

$$\frac{m}{m+1}B_{mi}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m+1} - x_i}B_{m-1,i}(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_i}B_{m-1,i+1}(x),$$

выражающем сплайны степени m через сплайны степени $m-1$. Функции $B_{mi}(x)$, $i = \overline{-m, N-1}$ образуют базис в пространстве сплайнов $S_{m,1}(\Delta_N)$, т.е. любой сплайн $S_m(x) \in S_{m,1}(\Delta_N)$ можно записать в виде

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} c_i B_{mi}(x), \quad c_i = const.$$

Применительно к случаю $m = 3$, которым мы ограничиваем свое рассмотрение, условимся в следующем. Кубические B-сплайны будем нумеровать таким образом, чтобы точке x_i соответствовал тот $B_k(x)$, который в ней имеет вершину,т.е.

$$\max_x B_i(x) = B_i(x_i).$$

Если функция $f(x)$ определена только на $[a, b]$, то продолжить ее за пределы отрезка $[a, b]$ с сохранением гладкостных свойств можно при помощи интерполяционных полиномов Лагранжа (см.[9], с.40). При такой нумерации на отрезке$[x_i, x_{i+1}]$ отличными от нуля окажутся лишь 4 таких B-сплайна: $B_{i-1}(x)$,$B_i(x)$,$B_{i+1}(x)$, $B_{i+2}(x)$ и при этом

$$B_{i-1}(x) = (1-t)^3/6, \quad B_i(x) = (1 + 3(1-t) + 3t(1-t^2))/6,$$

$$B_{i+1}(x) = (1 + 3t + 3t^2(1-t))/6, \quad B_{i+2}(x) = t^3/6, \quad t = (x - x_i)/h. \tag{3}$$

В этом случае аппроксимационный кубический сплайн,точный на кубических полиномах, имеет представление [8]:

$$S_3(f;x) = \sum_k \sum_{i=-1}^{1} a_i f(k+i) B_k(x), \tag{4}$$

где $a_{-1} = a_1 = -1/6, a_0 = 4/3$. В частности при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S_3(f;x) = \sum_{k=i-1}^{i+2} (-\frac{1}{6}f_{k-1} + \frac{4}{3}f_k - \frac{1}{6}f_{k+1})B_k(x), \tag{5}$$

где $B_k(x)$ берутся из (3), а $f_k = f(x_k)$. Построенные таким образом сплайны обладают хорошими аппроксимационными свойствами, о чем свидетельствует, например,

Теорема[7].Если $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$, то

$$\sup_{f\in W^4_\infty} \|f(x) - S_3(f;x)\|_C = \frac{35}{1152}h^4,$$

где через $W^l_p[a,b]$ обозначен класс функций $f(x)$, имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную $l-1$-го порядка и l-ю производную из $L_p[a,b]$, $1 \le p \le \infty$. Для сравнения укажем, что интерполяционный кубический сплайн $S_\Delta(f;x)$ с краевыми условиями $S''_\Delta(f;a) = f''(a)$, $S''_\Delta(f;b) = f''(b)$ на классе $W^4_\infty[a,b]$ дает такую погрешность

$$\sup_{f\in W^4_\infty} \|f(x) - S_\Delta(f;x)\|_C = \frac{5}{384}h^4,$$

т.е. локальный сплайн порядок аппроксимации имеет тот же, но с несколько большей константой.

Используя (3),(4),(5) получаем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(f;x)dx = \frac{h}{144}(-f_{i-2} - 3f_{i-1} + 76f_i + 76f_{i+1} - 3f_{i+2} - f_{i+3}),$$

а в силу того,что

$$\int_a^b S_3(f;x)dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(f;x)dx,$$

то получаем такую квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{144}\sum_{i=0}^{N-1}(-f_{i-2} - 3f_{i-1} + 76f_i + 76f_{i+1} - 3f_{i+2} - f_{i+3}). \tag{6}$$

Эта формула является точной для кубических полиномов и ее погрешность для $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ имеет порядок $O(h^4)$.

Интерполяционные бикубические сплайны, в частности,использовались в [12],[13], как для получения кубатурной формулы, так и для приближенного решения линейных интегральных уравнений. Пусть $M, N \ge 4$ – целые числа, $R = [a,b]\times[c,d]$. Построим разбиение $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x: \quad x_i = a + ih, \quad h = (b-a)/N, \quad i = \overline{0,N};$$

$$\Delta_y: \quad y_j = c + jh_1, \quad h_1 = (d-c)/M, \quad j = \overline{0,M};$$

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

Пусть $f(x,y) \in C[R]$, $S_{3,3}(f;x,y)$–ее интерполяционный бикубический сплайн в узлах сетки Δ.Введем обозначения

$$m_{ij} = D^{1,0}S_{3,3}(f;x_i,y_j); \quad n_{ij} = D^{0,1}S_{3,3}(f;x_i,y_j);$$

$$k_{ij} = D^{1,1}S_{3,3}(f; x_i, y_j); \quad i = \overline{0,N}, \quad j = \overline{0,M}. \tag{7}$$

При $(x,y) \in R_{ij}$, для $S_{3,3}(f;x,y)$ имеем такое представление

$$S_{3,3}(f;x,y) = (1-u)^2(1+2u)S_j(x)+u^2(3-2u)S_{j+1}(x)+u(1-u)h_1[(1-u)N_j(x)-uN_{j+1}(x)], \tag{8}$$

где

$$S_j(x) = (1-v)^2(1+2v)f_{ij} + v^2(3-2v)f_{i+1,j} + v(1-v)h[(1-v)m_{ij} - vm_{i+1,j}],$$

$$N_j(x) = (1-v)^2(1+2v)n_{ij} + v^2(3-2v)n_{i+1,j} + v(1-v)h[(1-v)k_{ij} - vk_{i+1,j}],$$

$$v = (x-x_i)/h, \quad u = (y-y_j)/h_1, \quad i = \overline{0,N-1}; j = \overline{0,M-1}.$$

Чтобы воспользоваться представлением (8), необходимо определить величины m_{ij}, n_{ij}, k_{ij} из $2M+N+3$ систем линейных алгебраических систем N-го порядка с трехдиагональными матрицами, привлекая еще различные краевые условия. В [12] при построении приводимой ниже кубатурной формулы для сплайна $S_{3,3}(f;x,y)$ использовались такие краевые условия

$$\begin{gathered}
m_{0,j} = (-11f_{0,j} + 18f_{1,j} - 9f_{2,j} + 2f_{3,j})/6h, \\
m_{N,j} = (-2f_{N-3,j} + 9f_{N-2,j} - 18f_{n-1,j} + 11f_{n,j})/6h, \quad j = \overline{0,M}; \\
n_{i,0} = (-11f_{i,0} + 18f_{i,1} - 9f_{i,2} + 2f_{i,3})/6h_1; \\
n_{i,M} = (-2f_{i,M-3} + 9f_{i,M-2} - 18f_{i,M-1} + 11f_{i,M})/6h_1; \quad i = \overline{0,N}; \\
k_{0,0} = (-11n_{0,0} + 18n_{1,0} - 9n_{2,0} + 2n_{3,0})/6h; \\
k_{0,M} = (-11n_{0,M} + 18n_{1,M} - 9n_{2,M} + 2n_{3,M})/6h; \\
k_{N,0} = (-2n_{N-3,0} + 9n_{N-2,0} - 18n_{N-1,0} + 11n_{N,0})/6h; \\
k_{N,M} = (-2n_{N-3,M} + 9n_{N-2,M} - 18n_{N-1,M} + 11n_{N,M})/6h.
\end{gathered} \tag{9}$$

Чтобы избежать процедуры многократного решения систем линейных уравнений, можно использовать аппроксимационный сплайн. Для $f \in C[R]$ аппроксимирующий агрегат будем задавать оператором $A_{1,2}$, который функции $f(x,y)$ ставит в соответствие функцию

$$A_{1,2}(f;x,y) = A_1^x A_2^y(f;x,y), \tag{10}$$

где условимся считать, что на функцию $f(x,y)$ оператор A_1^x действует как на функцию от x (при фиксированном y), сопоставляя ей функцию $A_1^x(f;x,y)$; оператор A_2

действует на $f(x,y)$ как на функцию от переменной y (при фиксированном x), сопоставляя ей функцию $A_2^y(f;x,y)$. Оператор $A_{1,2} = A_1A_2$ сопоставляет функции $f(x,y)$ функцию $A_{1,2}(f;x,y)$, являющуюся результатом последовательного действия на f сначала оператора $A_2 = A_2^y$ по переменной y, а затем оператора $A_1 = A_1^x$ по переменной x. Считаем, что операторы A_1 и A_2 перестановочны в том смысле, что

$$A_1^x A_2^y f = A_2^y A_1^x f.$$

Операторы A_1 и A_2 могут задаваться не обязательно однотипным образом. Например, A_1 может быть сплайн (эрмитовый, интерполяционный, локальный), а A_2– тригонометрический полином фиксированного порядка,если функция $f(x,y)$ по переменной y является периодической.

Пусть A_1 и A_2 есть кубические локальные сплайны минимального дефекта, точные на кубических полиномах. Тогда с учетом (5) для $(x,y) \in R_{ij}$ при фиксированном y имеем

$$A_1(f;x,y) = A_1^x(f;x,y) = \sum_{p=i-1}^{i+2} a_p(y)B_p(x),$$

где

$$a_p(y) = -\frac{1}{6}f(x_{p-1},y) + \frac{4}{3}f(x_p,y) - \frac{1}{6}f(x_{p+1},y).$$

Аналогично при фиксированном x имеем

$$A_2f(;x,y) = A_2^y f(x,y) = \sum_{q=j-1}^{j+2} b_q(x)B_q(y),$$

где

$$b_q(x) = -\frac{1}{6}f(x,y_{q-1} + \frac{4}{3}f(x,y_q) - \frac{1}{6}f(x,y_{q+1}).$$

В результате последовательного действия операторов A_1 и A_2 при $(x,y) \in R_{ij}$ получаем

$$S_\Delta(f;x,y) = A_2A_1(f;x,y) = \sum_{p=i-1}^{i+2}\sum_{q=j-1}^{j+2} a_{p,q}B_p(x)B_q(y), \tag{11}$$

где

$$a_{p,q} = \frac{1}{36}[f_{p-1,q-1} - 8f_{p,q-1} + f_{p+1,q-1} - 8f_{p-1,q}+$$
$$+ 64f_{p,q} - 8f_{p+1,q} + f_{p-1,q+1} - 8f_{p,q+1} + f_{p+1,q+1}]. \tag{12}$$

Формула (11) является точной для бикубических полиномов, в частности, при $(x,y) \in R_{ij}$

$$\sum_{k=i-1}^{i+2}\sum_{l=j-1}^{j+2} B_k(x)B_l(y) = 1. \tag{13}$$

Укажем теперь кубатурные формулы, полученные при помощи как интерполяционных, так и аппроксимационных бикубических сплайнов. Используя (8), имеем [12]:

$$\int_a^b \int_c^d S_{3,3}(f;(x,y)dxdy = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \tag{14}$$

где

$$A_1 = hh_1[0.25(f_{0,0} + f_{0,M} + f_{N,0} + f_{N,M}) + 0.5 \sum_{i=1}^{N-1} (f_{i,0} + f_{i,M}) +$$

$$+0.5 \sum_{j=i}^{M-1} (f_{0,j} + f_{N,j}) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} f_{i,j}];$$

$$A_2 = h^2 h_1[(m_{0,0} + m_{0,M} - n_{N,0} - n_{N,M}) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} (m_{0,j} - m_{N,j})]/24; \tag{15}$$

$$A_3 = hh_1^2[(n_{0,0} + n_{N,0} - n_{0,M} - n_{N,M}) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (n_{i,0} - n_{i,M})]/24; \tag{16}$$

$$A_4 = h^2 h_1^2 (k_{0,0} - k_{N,0} - k_{0,M} + k_{N,M})/144, \tag{17}$$

при этом величины, входящие в правые части (15)-(17), определяются по формулам (9). Формула (14) является точной для бикубических полиномов и представляет собой обобщение на двумерный случай "усложненного правила 3/8", имея для достаточно гладких функций точность $O(h^4 + h_1^4)$.

Для аппроксимационного бикубического сплайна имеем. Используя (11),(12), а также тот факт, что

$$\int_a^b \int_c^d S_\Delta(f;x,y)dxdy = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} S_\Delta(f;x,y)dxdy,$$

и учитывая выражения для $\{B_k(x)\}_{k=i-1}^{i+2}$ и $\{B_l(y)\}_{l=j-1}^{j+2}$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ и $y \in [y_j, y_{j+1}]$ получаем

$$\int_a^b \int_c^d S_\Delta(f;x,y) = \frac{hh_1}{576} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (a_{i-1,j-1} + 11a_{i-1,j} +$$

$$+11a_{i-1,j+1} + a_{i-1,j+2} + 11a_{i,j-1} + 121a_{i,j} + 121a_{i,j+1} + 11a_{i,j+2} +$$

$$+11a_{i+1,j-1} + 121a_{i+1,j} + 121a_{i+1,j+1} + 11a_{i+1,j+2} + a_{i+2,j-1} +$$

$$+11a_{i+2,j} + 11a_{i+2,j+1} + a_{i+2,j+2}), \tag{18}$$

где $a_{k,l}$ определены в (12).Если функция $f(x,y)$ является достаточно гладкой на R, то

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d S_\Delta(f;x,y)dxdy + \varepsilon,$$

где $\|\varepsilon\| = O(h^4 + h_1^4)$.

Пусть задано интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, u(t))dt, \tag{19}$$

где $f(x) \in C[a, b]$, $K(x, t, u)$ есть непрерывная функция своих аргументов, когда $x, t \in [a, b]$, $|u| < \mathcal{K}$. Пусть, кроме того, функция $K(x, t, u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, т.е.

$$|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \tag{20}$$

где $L - const$, не зависящая от u_1, u_2.

При фиксированном $x \in [a, b]$ рассмотрим такой итерационный процесс

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_n(x) = f(x) + \int_a^b S_\Delta(K(x, \cdot, u_{n-1}); t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где $S_\Delta(K(x, \cdot, u_{n-1}); t)$ есть аппроксимационный кубический сплайн для функции $K(x, t, u_{n-1}(t))$, по переменной t, построенный по сетке (1). Заметим, что в (21) интегралы вычисляются точно согласно формуле (6). Введем обозначения

$$\delta_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \quad \delta_0(t) = f(t),$$

тогда используя (6) и (20) получаем

$$\max_x |\delta_{n+1}(x)| \leq \frac{10}{9} L(b - a)\|\delta_n\|,$$

Если $\alpha = \frac{10}{9} L(b - a) < 1$, то итерационный процесс (21) сходится к некоторой непрерывной функции $u^*(x)$.

Если $u(x)$–точное решение уравнения (19), то имеет место такая оценка погрешности после n итераций

$$\|u(x) - u_n(x)\|_C \leq \frac{5}{3} \frac{\alpha_1 \alpha^n \|f\|}{1 - \alpha_1}, \tag{22}$$

где $\alpha_1 = L(b - a)$.

Теперь рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_c^d K(x, y, s, t, u(s, t))dtds. \tag{23}$$

Относительно функций $f(x, y)$ и $K(x, y, s, t, u)$ предполагаем, что они являются непрерывными функциями своих аргументов, когда $a \leq s, x \leq b$, $c \leq t, y \leq d$, $|u| < U_0$

и, кроме того, предположим, что функция K удовлетворяет условию Липшица по переменной u

$$|K(x,y,s,t,u_1) - K(x,y,s,t,u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \tag{24}$$

где константа L не зависит от u_1 и u_2. Рассмотрим итерационный процесс, в котором интегралы вычисляются точно.При фиксированных $(x,y) \in R$ полагаем

$$u_0(x,y) = f(x,y),$$
$$u_{n+1}(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d S_\Delta(K(x,y,\cdot,u_n);s,t)dtds, \tag{25}$$

где $S_\Delta(K(x,y,\cdot,u_n);s,t)$ - аппроксимационный бикубический сплайн по переменным s,t, построенный на расширенной сетке $\overline{\Delta}$. Вводя, как и раньше обозначение

$$\delta_{n+1}(x,y) = u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y), \quad \delta_0(x,y) = f(x,y),$$

и проводя рассуждения с использованием кубатурной формулы (18),получаем

$$\|\delta_{n+1}\| < q\|\delta_n\|,$$

а отсюда последовательно получаем

$$\|\delta_{n+1}\| < q^{n+1}\|f\|,$$

где

$$q = \frac{25}{9}L(b-a)(d-c).$$

При условии $q < 1$ последовательные приближения, определяемые соотношением (25), равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции $u^*(x,y)$ и имеет место такая априорная оценка погрешности после n-й итерации

$$\|u - u_n\|_C \leq \frac{q^{n+1}\|f\|}{1-q_1}, \tag{26}$$

где $q_1 = L(b-a)(d-c)$.

Замечания. 1.Процесс вида (21) для линейного интегрального уравнения оказался сходящимся в случае,когда метод последовательных приближений неприменим (см.[3],с.86-91).

2. Алгоритмы (21),(25), построенные на базе интерполяционных и аппроксимационных сплайнов, хорошо реализуются на ЭВМ и применялись при исследовании некоторых математических моделей в экологии, нелинейной оптике [14], а также в вычислениях при исследовании автоволн в диссипативных системах с диффузией и нейроструктурах.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект N 2.4/955)

1. Поляков Р.В.,Старков В.Н.,Тивончук В.И.,Яшин А.А. Решение класса актуальных задач медико-биологического и экологического моделирования методами вычислительной физики с использованием сплайн-функций.Часть 1. //Вестник новых медицинских технологий.–1996.– **3**, N 3.–С.22-29.

2. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 584 с.

3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы.– Киев: Наук.думка, 1993.– 288 с.

4. Расщепляев Ю.С.,Соколов С.В. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений на основе метода инвариантного погружения //Журн.выч.матем. и мат.физики. – 1997. – **37**, N 3. – С. 310-314.

5. Верлань А.Ф.,Сизиков В.С. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук.думка, 1986. – 544 с.

6. Golberg M.A. A survey of numerical methods for integral equations.– In: Solution Methods for Integral Equations. Theory and Applications. M.A.Golberg ed.– New York-London: Plenum Press, 1979. – P.1-58.

7.Корнейчук Н.П.Сплайны в теории приближения.–М: Наука,1984.–352 с.

8. Завьялов Ю.С.,Квасов Б.И.,Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

9. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.

10. Schumaker L.L. Spline functions: basic theory. – New York: Wiley, 1981.– 553 p.

11. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

12. Поляков Р.В. Решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода сплайн-кубатурным методом в сочетании с итерациями. – Киев, 1987. – 30 с. – (Препр. /АН УССР. Ин-т физики; N 24).

13. Поляков Р.В. Об итерационном сплайн-квадратурном методе решения интегральных уравнений второго рода //Труды Матем.ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР.–М.:Наука, 1987.–**180**.–С.180-181.

14. Поляков Р.В.,Старков В.Н.,Тивончук В.И.,Хижняк А.И. Алгоритм восстановления структуры волнового фронта с помощью сплайнов.– Киев, 1988.– 16с.– (Препр./АН УССР. Ин-т физики;N 35).